Exercice 1.
1. On note $A^0 = \mathrm{I}_n$, puis par récurrence $A^k = A \cdot A^{k-1}$ (i.e. $A^k = A \cdot A \cdot \cdots \cdot A$, k fois). Pour un polynôme $P = \sum_{k=0}^d a_k X^k$ on définit alors $P(A) = \sum_{k=0}^d a_k A^k$.
2. C'est le même procédé : on note $f^0 = \mathrm{Id}$, puis par récurrence $f^k = f \circ f^{k-1}$ (i.e. $f^k = f \circ f \circ \cdots \circ f$, k fois). Pour un polynôme $P = \sum_{k=0}^d a_k X^k$ on définit alors $P(f) = \sum_{k=0}^d a_k f^k$.
3. On trouve
$$A^2 = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$
$$A^3 = \begin{pmatrix} 13 & 8 \\ 8 & 5 \end{pmatrix},$$
et donc
$$P(A) = A^3 - A - 4\,\mathrm{I}_2 = \begin{pmatrix} 13 & 8 \\ 8 & 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 7 \\ 7 & 0 \end{pmatrix}.$$
4. Le théorème de Cayley-Hamilton dit que si $\chi_A(X)$ est le polynôme caractéristique d'une matrice carrée A, alors $\chi_A(A) = 0$ (la matrice nulle). On peut aussi l'énoncer en disant que tout endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie annule son polynôme caractéristique.
5. En général deux endomorphismes d'un espace vectoriel V ne commutent pas, mais si $f \in \mathscr{L}(V)$ et P et Q sont deux éléments de $\mathbb{K}[X]$ alors les endomorphismes $P(f)$ et $Q(f)$ commutent car les polynômes P et Q commutent :
$$P(f) \circ Q(f) = (P \cdot Q)(f) = (Q \cdot P)(f) = Q(f) \circ P(f).$$
6. $\lambda \in \mathbb{K}$ est valeur propre de f si et seulement s'il existe $v \in V$ non nul tel que $f(v) = \lambda v$. Observons qu'alors $f^k(v) = \lambda^k v$, ainsi pour $P(X) = \sum_{k=0}^d a_k t^k$ on a
$$P(f)v = \left(\sum_{k=0}^d a_k f^k\right)(v) = \left(\sum_{k=0}^d a_k f^k(v)\right) = \sum_{k=0}^d a_k \lambda^k v = P(\lambda) \cdot v.$$
Il s'ensuit que v est un vecteur propre de $P(f)$ avec valeur propre associée $P(\lambda)$.
7. Le sous-espace vectoriel $W \subset V$ est invariant par f si $f(W) \subset W$. De façon équivalente
$$w \in W \;\Rightarrow\; f(w) \in W$$
8. Il faut montrer que si w appartient au noyau de $P(f)$, alors $f(w)$ appartient aussi au noyau de $P(f)$, c'est-à-dire que $P(f)(f(w)) = 0$. Supposons donc que $w \in \mathrm{Ker}(P(f))$, alors $P(f)(w) = 0$, donc
$$P(f)(f(w)) = (P(f) \circ f)(w) = (f \circ P(f))(w) = f(P(f)(w)) = f(0) = 0.$$

Exercice 2. On calcule que $\chi_A = -(X-1)^2(X-7)$. Ce polynôme est scindé comme polynôme de $\mathbb{R}[X]$, donc A est triangulable sur le corps des réels.

Le spectre est $\sigma(A) = \{1, 7\}$, avec multiplicités algébrique 2 pour $\lambda_1 = 1$ et 1 pour $\lambda_2 = 7$. Les espaces propres associés sont

$$\mathrm{Ker}(A - I) = \mathrm{Vect}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}\right\}, \quad \mathrm{Ker}(A - 7I) = \mathrm{Vect}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}\right\}$$

Ainsi la multiplicité géométrique de la valeur propre $\lambda_1 = 1$ est strictement plus petite que sa multiplicité algébrique ce qui prouve que A n'est pas diagonalisable.

Le polynôme spectral de A est $\nu_A = (X-1)(X-7)$, donc le polynôme minimal est ou bien $\mu_A = (X-1)(X-7)$, ou bien $\mu_A = (X-1)^2(X-7)$. On calcule facilement que $\nu_A(A) = (A - \mathrm{I}_3)(A - 7\,\mathrm{I}_3) \neq 0$, donc le polynôme minimal est $\mu_A(X) = (X-1)^2(X-7)$.

(Remarquez que $\nu_A(A) \neq 0$ redémontre que A n'est pas diagonalisable).

Exercice 3. a) C'est la 2ème réponse qui est correcte. Le théorème de Hamilton-Cayley nous dit que μ_A divise χ_A, donc en particulier $\deg(\mu_A) \leq \deg(\chi_A)$, c'est-à-dire $d \leq n$.

Du coup, la 3ème réponse est fausse. Quant à la 1ère, elle n'a rien à voir avec la question.

b) C'est la 3ème réponse qui est correcte. Par un théorème du cours, si le polynôme caractéristique est scindé alors la somme de toutes les valeurs propres (répétées selon leur multiplicité) vaut $\mathrm{Tr}(A)$. Cela donne $m_1\lambda_1 + \ldots + m_r\lambda_r = \mathrm{Tr}(A)$. Lorsque chaque multiplicité vaut 1, alors $r = n$ (car il y a dans ce cas n racines distinctes de $\chi_A(X)$), et donc l'équation générale $m_1\lambda_1 + \ldots + m_r\lambda_r = \mathrm{Tr}(A)$ devient $\lambda_1 + \ldots + \lambda_n = \mathrm{Tr}(A)$.

En revanche, on ne peut rien dire en général de $\lambda_1 + \ldots + \lambda_r$ lorsque $r < n$. Supposons par exemple que $n = 3$ et que $A = \begin{pmatrix} 4 & * & * \\ 0 & 4 & * \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$. Alors les 3 valeurs propres sont 4, 4 et 5 (donc $n = 3$, $r = 2$, $\lambda_1 = 4$ avec multiplicité $m_1 = 2$, et $\lambda_2 = 5$ avec multiplicité $m_2 = 1$). Alors $\mathrm{Tr}(A) = 4 + 4 + 5 = 13$, mais $\lambda_1 + \lambda_2 = 4 + 5 \neq \mathrm{Tr}(A)$. Donc la 1ère réponse n'est pas correcte.

Exercice 4. a.) Si A est nilpotente d'ordre m, alors $\mu_A = X^m$ est son polynôme minimal. En effet, si $A^m = 0$, t^m est un polynôme annulateur de A. On sait que le polynôme minimal divise tout polynôme annulateur donc le polynôme minimal doit être $\mu_A = X^k$ avec $k \leq m$, mais si $k < m$ alors m n'est pas l'ordre de nilpotence de A.

Réciproquement, si $\mu_A = X^m$ alors A est nilpotente d'ordre m.

b.) Si A est nilpotente, alors sa seule valeur propre est $\lambda = 0$ [preuve : si v est un vecteur propre : $Av = \lambda v$, alors $0 = A^m v = \lambda^m v$, donc $\lambda^m = 0$ (car $v \neq 0$), et par conséquent $\lambda = 0$]. Donc si A est diagonalisable, alors A est semblable à $\mathrm{Diag}(0, 0, \cdots, 0)$ qui est la matrice nulle. Or tout matrice semblable à la matrice nulle est elle-même la matrice nulle.
Autre raisonnement. On vient de voir que si A est nilpotente d'ordre m, alors son polynôme minimal $\mu_A(X) = t^m$. Donc 0 est la seule racine de $\mu_A(X)$ (cela redémontre que 0 est la seule valeur propre de A). Or l'hypothèse que A est diagonalisable implique que les racines de $\mu_A(X)$ sont simples. Donc $m = 1$ et ainsi $A = A^1 = A^m = 0$.

c.) La façon la plus simple et rapide de prouver qu'une matrice A strictement triangulaire est de remarquer que son polynôme caractéristique est x^n et d'appliquer le théorème de Cayley-Hamilton qui dit que dans ce cas que $A^n = 0$.

Voici un autre argument qui n'utilise pas Cayley-Hamilton. Supposons que la matrice carrée $A = (a_{ij}) \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ est strictement triangulaire supérieure, cela signifie que $a_{ij} = 0$ si $i \geq j$. Notons $\{e_1, \cdots, e_n\} \in \mathbb{K}^n$ la base canonique de $\mathbb{K}^n$, alors on a $Ae_j = \sum_{i=1}^{j-1} a_{ij} e_i$, c'est-à-dire

$$\begin{aligned}
Ae_1 &= 0 \\
Ae_2 &= a_{12}\, e_1 \\
Ae_3 &= a_{13}\, e_1 + a_{23}\, e_2 \\
&\cdots \\
Ae_n &= a_{1n}\, e_1 + a_{2n}\, e_2 + \cdots + a_{n-1,n}\, e_{n-1}
\end{aligned}$$

On constate donc que $Ae_1 = 0$, puis $A^2 e_2 = A(Ae_2) = a_{12} \cdot Ae_1 = 0$, puis $A^3 e_3 = 0$ etc. et finalement $A^n e_n = 0$. En particulier $A^n e_j = 0$ pour tout j, donc $A^n = 0$ (car une application linéaire qui s'annule sur tous les vecteurs de bases est l'application nulle).

Observer que bien que l'énoncé parle de matrice, on a en fait raisonné sur l'endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ associé, à savoir $x \mapsto Ax$. Si on veut vraiment raisonner matriciellement on a le schéma suivant (disons pour une matrice $A \in \mathrm{M}_4(\mathbb{K})$) qui montre ce qu'il se passe lorsqu'on calcule les puissances d'une matrice strictement triangulaire supérieure :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad A^4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On peut facilement rédiger une preuve formelle à partir de ce schéma.

Exercice 5. Supposons que N_1 est nilpotent d'ordre m_1 et N_2 est nilpotent d'ordre m_2. Supposons aussi que $m_1 \leq m_2$, alors puisque on suppose $N_1 N_2 = N_2 N_1$ on a

$$(N_1 \cdot N_2)^{m_1} = N_1^{m_1} \cdot N_2^{m_1} = 0 \cdot N_2^{m_1} = 0.$$

Donc le produit N_1N_2 est nilpotent d'ordre au plus m_1.

Pour montrer que la somme N_1+N_2 est nilpotente, on écrit la formule du binôme de Newton

$$(N_1+N_2)^m=\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}N_1^kN_2^{m-k}.$$

Cette formule est valide car on a supposé que les deux matrices commutent. Si m est assez grand, alors pour chaque $0\leq k\leq m$ on a ou bien $k\geq m_1$ (et alors $N_1^k=0$) ou bien $(m-k)\geq m_2$ (et alors $N_2^{m-k}=0$), ceci implique $(N_1+N_2)^m=0$ et donc que N_1+N_2 est nilpotent.

En fait on peut préciser la valeur de m. Si on pose $m=m_1+m_2-1$, alors pour tout entier k on a ou bien $k\geq m_1$ ou bien $m-k\geq m_2$, car si $k<m_1$, alors $m-k=(m_1+m_2-1)-k>m_2-k-1\geq m_2-k$.

Un contre-exemple dans le cas N_1 et N_2 ne commutent pas est donné par

$$N_1=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}\quad\text{et}\quad N_2=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}.$$

Ces deux matrices sont nilpotentes, mais les matrices

$$(N_1+N_2)=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\quad\text{et}\quad N_1\cdot N_2=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$$

ne sont pas nilpotentes.

Exercice 6. a) Pour voir si un polynôme est un polynôme annulateur d'un endomorphisme linéaire, il suffit d'évaluer ce polynôme sur la matrice de l'endomorphisme par rapport à une base quelconque.

La matrice de f par rapport à la base canonique est

$$A=\begin{pmatrix}3&-1&1\\2&0&1\\1&-1&2\end{pmatrix}.$$

On obtient $(A-\mathrm{I}_3)(A-2\cdot\mathrm{I}_3)^2=\begin{pmatrix}2&-1&1\\2&-1&1\\1&-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1&1\\2&-2&1\\1&-1&0\end{pmatrix}^2=0.$

Donc $P=(X-1)(X-2)^2\in\mathbb{R}[t]$ est un polynôme annulateur de f.

(Autre méthode, on peut aussi vérifier que $(X-1)(X-2)^2$ est le polynôme caractéristique de A et déduire sans calcul que $P(A)=\chi_A(A)=0$ par le théorème de Cayley-Hamilton).

b) Un calcul simple donne

$$(A - \mathrm{I}_3)(A - 2\cdot \mathrm{I}_3) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \neq 0\,,$$

et $(X-1)(X-2)$ n'est donc pas un polynôme annulateur de f.

Un calcul simple donne

$$(A - \mathrm{I}_3)^2(A - 2\cdot \mathrm{I}_3) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}^2\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \neq 0\,,$$

et $(X-1)^2(X-2)$ n'est donc pas un polynôme annulateur de f.

Comme on a vu que $(A-\mathrm{I}_3)(A-2\cdot\mathrm{I}_3)^2 = 0$, en multipliant par $A - \mathrm{I}_3$ on obtient $(A-\mathrm{I}_3)^2(A-2\cdot\mathrm{I}_3)^2 = 0$ et $(X-1)^2(X-2)^2$ est donc aussi un polynôme annulateur de f.

c) Comme $(X-1)(X-2)^2$ est un polynôme annulateur de f, le polynôme minimal de f divise $(X-1)(X-2)^2$, donc $\mu_f \in \{(X-1),(X-2),(X-1)(X-2),(X-2)^2,(X-1)(X-2)^2\}$.

Or, on a vérifié dans b) que $(X-1)(X-2)$ n'est pas un polynôme annulateur de f, donc $(X-1)$ et $(X-2)$ ne le sont pas. De plus on voit aisément que

$$(A - 2\cdot \mathrm{I}_2)^2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \neq 0.$$

Conclusion : Le polynôme minimal de l'endomorphisme f est $\mu_f = (X-1)(X-2)^2$ (et dans cet exemple c'est aussi le polynôme caractéristique de f).

Exercice 7. 1) Il suffit de prouver que $\mathscr{F}$ est un sous-espace vectoriel de l'espace des fonctions lisses. Or il est clair que $\mathscr{F} \neq \emptyset$ (il suffit de constater que la fonction nulle $0 \in \mathscr{F}$). Supposons que φ et ψ appartiennent à $\mathscr{F}$, alors il existe des constantes $a, b, c, d, a', b', c', d'$ telles que

$$\varphi(x) = (a+bx)e^x + (c+dx)e^{-x}, \quad \psi(x) = (a'+b'x)e^x + (c'+d'x)e^{-x}.$$

Donc la fonction $\varphi + \psi$ appartient bien à $\mathscr{F}$ car elle s'écrit

$$\varphi+\psi : x \mapsto ((a+a') + (b+b')x)e^x + ((c+c')+(d+d')x)e^{-x}.$$

De même pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on a

$$(\lambda\cdot\varphi)(x) = (\lambda a + \lambda b x)e^x + (\lambda c + \lambda d x)e^{-x},$$

qui est bien une fonction du type $(a''+b''x)e^x+(c''+d''x)e^{-x}$. Par conséquent $\lambda\cdot\varphi \in \mathscr{F}$.

2) Une base est $\varphi_1(x) = e^x$, $\varphi_2(x) = xe^x$, $\varphi_3(x) = e^{-x}$, $\varphi_4(x) = xe^{-x}$. Par définition tout élément de $\mathscr{F}$ est combinaison linéaire de ces vecteurs, en effet si $\varphi(x) = (a+bx)e^x + (c+dx)e^{-x}$ alors

$$\varphi = a\varphi_1 + b\varphi_2 + c\varphi_3 + d\varphi_4.$$

Pour compléter l'argument on peut ou bien observer que cette écriture de φ est unique ou bien montrer que $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$ sont linéairement indépendantes.

C'est facile à voir. Si $\lambda_i \in \mathbb{R}$ sont tels que

$$\lambda_1\, e^x + \lambda_2\, x\, e^x + \lambda_3\, e^{-x} + \lambda_4\, x\, e^{-x} = 0 \qquad \text{pour tout } x \in \mathbb{R},$$

alors, en divisant par $x\, e^x$ (pour $x > 0$) et en faisant tendre $x \to \infty$, on obtient $\lambda_2 = 0$, car

$$\frac{1}{xe^x}\left(\lambda_1\, e^x + \lambda_2\, x\, e^x + \lambda_3\, e^{-x} + \lambda_4\, x\, e^{-x}\right) = \frac{\lambda_1}{x} + \lambda_2 + \lambda_3\frac{e^{-2x}}{x} + \lambda_4\, e^{-2x} \underset{x\to\infty}{\longrightarrow} \lambda_2.$$

On peut donc diviser par e^x et appliquer le même argument pour trouver $\lambda_1 = 0$. On divise à présent par $x\, e^{-x}$, ce qui donne à la limite $\lambda_4 = 0$, et on a donc $\lambda_3 = 0$ également en prenant $x = 0$. On peut aussi résoudre un système d'ordre quatre en prenant quatre valeurs distinctes de x, mais c'est pédestre.

3) On sait déjà que D est linéaire, il faut seulement observer que D est interne, i.e. si $\varphi \in \mathscr{F}$, alors $D(\varphi) \in \mathscr{F}$. C'est immédiat par le calcul suivant :

$$D((a+bx)e^x + (c+dx)e^{-x}) = ((a+b)+bx)e^x + ((d-c)-dx)e^{-x},$$

4) Dans cette base on a

$$\text{Matrice de } D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

(cette matrice est une forme de Jordan)

5) A partir de la matrice on obtient facilement le polynôme caractéristique

$$\chi_D = X^4 - 2X^2 + 1 = (X-1)^2(X+1)^2.$$

6) La valeur propre $\lambda = 1$ est de multiplicité algébrique 2 et de multiplicité géométrique 1 (car $(D - 1 \cdot \mathbf{I})$ est de rang 3). Il en est de même pour la valeur propre $\lambda = -1$.

7) L'opérateur D n'est pas diagonalisable puisque les multiplicités géométrique et algébrique des valeurs propres ne coïncident pas.

h) On sait que le polynôme minimal doit être du type $\mu_D = (X-1)^{s_1}(X+1)^{s_2}$ où s_1, s_2 peuvent prendre les valeurs 1 ou 2. Or on vérifie que aucune des matrices

$$(D - \mathrm{I}_4)(D + \mathrm{I}_4), \quad (D - \mathrm{I}_4)^2(D + \mathrm{I}_4), \quad (D - \mathrm{I}_4)(D + \mathrm{I}_4)^2$$

n'est nulle, donc le polynôme minimal est $\mu_D(X) = t^4 - 2t^2 + 1 = (X-1)^2(X+1)^2$ (c'est le polynôme caractéristique). Remarquons que le polynôme minimal n'est pas à racines simples, ce qui donne un autre argument pour la question (g).

Exercice 8. Commençons par les fonctions propres. Une fonction $\varphi(x)$ est propre pour l'opérateur D et la valeur propre $\lambda = 0$ si et seulement si $D\varphi = \varphi' = 0$, c'est-à-dire φ est constante.

Plus généralement, $D^k\varphi = 0$ si et seulement si φ est un polynôme de degré $< k$. Ainsi l'ensemble des fonctions propres généralisées de l'opérateur de dérivation pour la valeur propre $\lambda = 0$ n'est autre que $\mathbb{R}[X]$, l'ensemble de tous les polynômes.

Exercice 9.

1. Toutes les colonnes de H sont multiples d'un même vecteur non nul, donc
   $\mathrm{rang}(H) = 1$.
2. Par le théorème du rang, on déduit que $\dim(\mathrm{Ker}(H)) = 4 - 1 = 3$. Le noyau se trouve en résolvant $x + y + z + t = 0$ et une base est donc donnée par $\{(1, -1, 0, 0), (1, 0, -1, 0), (1, 0, 0, -1)\}$.
3. H n'est pas inversible puisque $\mathrm{Ker}(H) \neq \{0\}$. Donc $\det(H) = 0$.
4. $H^2 = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \end{pmatrix}$, c'est-à-dire $H^2 = 4H$.
5. On a $H^2 - 4H = 0$, donc le polynôme $P = X^2 - 4X = X(X-4)$ annule H.
6. Le polynôme $P = X(X-4)$ est un multiple du polynôme minimal car il annule la matrice H. Mais ni $P_1 = X$ ni $P_2 = (X-4)$ n'annulent H, donc $\mu_H = P = X(X-4)$.

   Les valeurs propres de H sont donc 0 et 4 (car ce sont les racines de $\mu_H(X)$). Dans cet exemple le polynôme spectral est égal au polynôme minimal : $\mu_H = \nu_H = X(X-4)$.

   Autre raisonnement pour trouver les valeurs propres. On sait déjà que 0 est valeur propre car $\mathrm{Ker}(H) \neq \{0\}$, et il est très facile de voir que 4 est aussi valeur propre de H (avec vecteur propre $(1, 1, 1, 1)$).

7. H est diagonalisable sur le corps $\mathbb{Q}$ car le polynôme spectral $\nu_H = X(X-4) \in \mathbb{Q}[X]$ annule H (on peut aussi dire que le polynôme minimal $\mu_H = X(X-4) \in \mathbb{Q}[X]$ est scindé et ses racines sont simples).

   Pour diagonaliser H, on cherche une matrice diagonale D et une matrice inversible P (la matrice modale) telles que $D = P^{-1}HP$ est diagonale, ou de manière équivalente $HP = PD$. Il est clair que la forme diagonale est donnée par

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

   Pour trouver la matrice modale, on cherche une base propre de H. Mais on a déjà explicité une base du noyau et un vecteur propre pour la valeur propre $\lambda = 4$, on en déduit la matrice modale

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

   On vérifie très facilement que

$$HP = PD = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

   On peut aussi calculer P^{-1} puis vérifier que $P^{-1}HP = D$, ça n'est pas vraiment nécessaire et ça demande un peu plus de calculs :

$$P^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$